Grado en Matemáticas – Examen de Análisis Funcional

1. Dada una sucesión acotada, $y \in \ell_\infty$, se define un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_p$, donde $1 \leqslant p \leqslant \infty$, por
$$[Tx](n) = y(n)x(n) \quad (x \in \ell_p, n \in \mathbb{N})$$
a) Estudia la continuidad de T y calcula su norma. ¿Hay algún valor de p para el que pueda asegurarse que T alcanza su norma?

   b) Prueba que T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, existe un número $r > 0$ tal que $|y(n)| \geqslant r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $A = \{e_{2n-1} + e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

   a) Describe los espacios $M = A^\perp$ y $M^\perp$.

   b) Calcula las proyecciones ortogonales sobre M y $M^\perp$.

3. Sea $u \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ una sucesión tal que para todo $x \in \ell_1$ se verifica que la sucesión $\{x(n)u(n)\}$ está acotada. Prueba que u está acotada.

4. Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$.

5. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, indicando el resultado de teoría que lo justifica, o proporcionando una prueba o un contraejemplo.

   a) ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial de las funciones polinómicas?

   b) Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Supongamos que para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \ker(T^n)$. Entonces existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = 0$.

   c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $T_n : c_0 \to c_0$ definido por $T_n(x) = x(n)e_n$. Entonces $T_n \in L(c_0, c_0)$ y $\{T_n\}$ converge puntualmente a cero pero no converge a cero en $L(c_0, c_0)$.

6. Responde a uno de los siguientes temas.

   a) Espacios normados de dimensión finita. Teorema de Hausdorff (unicidad de la topología de la norma). Consecuencias. Teorema de Riesz (compacidad local).

   b) Espacios de Hilbert. Aproximación óptima a un convexo. Ortogonalidad. Teorema de la proyección ortogonal. Teorema de Riesz-Frechet.

   c) Teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada.

Granada, 4 de noviembre de 2019